ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.

VII. KÖTET. VI. SZÁM. 1879.

A MÖBIUS-FÉLE KRITÉRIUMOKRÓL A KÚPSZELETEK ELMÉLETÉBEN.

HUNYADY JENŐ
LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1879. október 20.)

Ára 10 kr.

BUDAPEST, 1879.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

A MÖBIUS-FÉLE

KRITÉRIUMOKRÓL

A

KÚPSZELETEK ELMÉLETÉBEN.

HUNYADY JENŐ

LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1879. október 20.)

BUDAPEST, 1879.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1879. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.

A Möbius-féle kritériumokról, a kúpszeletek elméletében.

Az elemző geometria elemeiből ismeretes, hogy a kúpszeletet átalában öt mértani feltétel határozza meg; ha a kúpszelet parabola, úgy mivel annak egyenlete csak négy egymástól független állandótól függ, akkor azt négy mértani feltétel határozza meg.

Így tehát a következő feladatok:

1. Kerestetik a parabola, a mely négy ponton átmegy.
2. Kerestetik a kúpszelet, a mely öt adott ponton megy át.
3. Kerestetik a parabola, mely négy adott egyenest érint.
4. Kerestetik azon kúpszelet, a mely öt adott egyenest érint: teljesen meghatározott feladatok.

Az első feladatnál már a priori látjuk, hogy annak két megoldása lesz, a 2-dik és 4-dik feladatnál pedig azon kérdés merűl fel, hogy a feladat követelményeinek megfelelő kúpszelet mikor ellipsis és mikor hyperbola.

Az itt felhozott kérdésekre határozott feleletet adnak azon kritériumok, melyeket Mőbius *) »Der barycentrische Calcul« czimű nagy munkájában tett közzé először.

E kritériumokból megismerni:

1. Hogy négy ponton mikor mehet parabola át.
2. Hogy az öt ponton átmenő kúpszelet mikor ellipsis és mikor hyperbola.
3. Hogy az öt adott egyenest érintő kúpszelet mikor ellipsis és mikor hyperbola.

Annak daczára, hogy a felsorolt kritériumok a kúpsze-

*) Dritter Abschnitt p. 371—399.

letek elméletében fontos szerepet játszanak, úgy azok még mindeddig nem méltattak kellő figyelemre az analytikai geometriát tárgyaló kézikönyvekben, mely minden esetre meglepő körülménynek, — hogy azok még a legmodernebb kézikönyvekbe, mint különösen George Salmon a kúpszeleteket a legbehatóbban tárgyaló »Conic Sections« czimű munkájába sem vétettek fel — főokát abban találjuk, hogy az említett kritériumok, eddig még nem vezettettek le az elemző geometria szokottabb módszerei szerint, mely levezetések által azok a kúpszeletek egyébb elméleteihez mintegy jobban simúlnak valamint a kúpszeletek egyébb tételeinek lánczolatában azon hézag is kiválik a hová a kérdésben forgó kritériumok beillesztendők.

A felsorolt kritériumok levezetései képezik a következő sorok tárgyát.

1. Legyenek x, y és u, v a sík tetszőleges pontjának és egyenesének orthogonál pont- és vonal-coordinátái, továbbá x_i, y_i az i pont orthogonál coordinátái és u_k, v_k a k egyenes orthogonál vonal-coordinátái, végre pedig

$$\begin{vmatrix} x_i, & y_i, & 1 \\ x_k, & y_k, & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = (ik0)$$

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix} = (ikl)$$

Ugyanezen jelöléseket használjuk szintén a következő kifejezéseknél:

$$\begin{vmatrix} u_i & v_i & 1 \\ u_k & v_k & 1 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = (ik0)$$

$$\begin{vmatrix} u_i & v_i & 1 \\ u_k & v_k & 1 \\ u_l & v_l & 1 \end{vmatrix} = (ikl)$$

a mi itten lehetséges a nélkül, hogy azok értelmet zavaró félreértésre okot szolgáltatnának, mivel az utolsó jelölések csak a 3-dik kritériumnál alkalmaztatnak.

Legyen azután még:

$$\begin{vmatrix} y_i & 1 \\ y_k & 1 \end{vmatrix} = \xi_{ik}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_k \end{vmatrix} = \eta_{ik}, \quad \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix} = \zeta_{ik}.$$

$$\begin{vmatrix} v_i & 1 \\ v_k & 1 \end{vmatrix} = q_{ik}, \quad \begin{vmatrix} 1 & u_i \\ 1 & u_k \end{vmatrix} = r_{ik}, \quad \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_k & v_k \end{vmatrix} = s_{ik}.$$

2. Az 1, 2, 3, 4 pontokon átmenő parabolának a meghatározása akkép történik, hogy a következő egyenlet által:

$$(120)(340)-\lambda(140)(230)=0 \,. \,. \,. \,. \, (1)$$

kifejezett kúpszelet-seregben a parabolákat felkeressük; ezeket pedig találjuk, ha λ-nak azon értékeit határozzuk meg, melyeknél az (1) alatti kúpszelet parabola lesz.

Az (1) alatti kúpszeletre nézve a parabola föltételét nyerjük, ha ez (1) alatti egyenletben a kijelölt műtétek végrehajtása után kifejezzük, hogy az általa képviselt kúpszelet parábola. A kérdéses feltétel a következő:

$$\{\xi_{12}\eta_{34}+\xi_{34}\eta_{12}-\lambda(\xi_{14}\eta_{23}+\xi_{23}\eta_{14})\}^2-4\{\xi_{12}\xi_{34}-\lambda\xi_{14}\xi_{23}\}$$
$$\{\eta_{12}\eta_{34}-\lambda\eta_{14}\eta_{23}\}=0,$$

vagy ha ezen egyenletet λ szerint rendezzük és még továbbá redukáljuk, az a következő alakot veszi fel:

$$(\xi_{14}\eta_{23}-\xi_{23}\eta_{14})^2\lambda^2-2\{(\xi_{12}\eta_{23}-\xi_{23}\eta_{12})(\xi_{14}\eta_{34}-\xi_{34}\eta_{14})+$$
$$(\xi_{12}\eta_{14}-\xi_{14}\eta_{12})(\xi_{23}\eta_{34}-\xi_{34}\eta_{23})\}\lambda+(\xi_{12}\eta_{34}-\xi_{34}\eta_{12})^2=0,$$

ha pedig ez egyenletben a ξ és η mennyiségek értékeit helyettesítjük, úgy végre a parabola esetében λ meghatározására a következű másodfokú egyenletet nyerjük:

$$\{(123)-(234)\}^2\lambda^2-2\{(234)(124)+(134)(123)\}\lambda$$
$$+\{(134)-(234)\}^2=0 \,. \,. \,. \, (2)$$

Miután az (1) alatti egyenletben λ-nak mindig valósnak kell lenni, azért a négy ponton csak úgy mehet át egy parabola, ha a (2) alatti egyenletnek a gyökei valósok. Későbben látjuk majd, hogy ezen valós gyököknek egymástól különbözőknek is kell lenni, miután az egyenlő gyökök a feladat természeténél fogva ki vannak zárva.

A (2) alatti egyenletnek a gyökei valósok és egymástól különbözők, ha

$$\{(234)(124)+(134)(123)\}^2-\{(123)-234)\}^2$$
$$\{(134)-(234)\}^2>0,$$

vagy ha az egyenlet első tagjában a négyzetek különbségét tényezőkre felbontjuk és megjegyezzük, hogy a (234), (134) stb. determinánsok a következő azonos egyenletnek:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 1 \\ 1 & x_3 & y_3 & 1 \\ 1 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = o$$

hódolnak, úgy az előbbi föltétel könnyen a következő alakra hozható:

$$(234)(134)(124)(123) > o \dots (3).$$

Ha továbbá a 234, 134, 124, 123 háromszögök kétszeres területeit t_1, t_2, t_3, t_4-gyel jelöljük, úgy a használt jelöléseknél fogva:

$$t_1 = \pm(234),\ t_2 = \pm(134),\ t_3 = \pm(124),\ t_4 = \pm(123),$$

mely egyenletekben a felső, vagy alsó előjelek választandók, a mint a 2342, 1341, 1241, 1231 körülirások positivok, vagy negativok.*) A (3) alatti föltétel tehát csak úgy állhat fenn, ha az 1, 2, 3, 4 pontok által meghatározott négy háromszög közűl páros számú háromszögöknek positiv és ennélfogva szintén páros számú háromszögöknek negativ körülirás felel meg. Ha a négy pont közül az 1, 2, 3 pontokat állandóknak gondoljuk, úgy a *4* pont a sík azon hét részében fekhetik, melyekre az 123 háromszög oldalai által osztatik. Ha a *4* pont a síknak azon végtelen részeiben fekszik, melyek az 123 háromszög oldalai felett állanak, úgy az idom puszta megtekintéséből látni, hogy akkor a (3) alatti feltétel áll, ez esetben a négy pont oly helyzetet foglal el egymás irányában, hogy bármely három pont által meghatározott háromszög a negyedik pontot mindig kizárja. Ha pedig az előbbivel ellenkezőleg a *4* pont vagy magában az 123 háromszögben, vagy pedig a síknak azon végtelen részeiben fekszik, melyek a háromszög csúcsai felett emelkednek, úgy az ellenkező történik és az esetben egyik pont a másik három által meghatározott háromszögben fekszik. Az átmenet esete, a melyben t. i. a fentebbi szorzat eltünnék, itt ki van zárva, miután ezen feltétel

---

*) Lásd a szerző következő czímű munkájában: »Elemző geometria a síkban« 4. l.

feltételezné, hogy a négy pont közűl három egy egyenesben feküdnék, a mi a felvétel ellen volna.

Mindezeknél fogva a következő tétel áll:

»*Ha négy pont helyzete olyan, hogy bármely három által meghatározott háromszög a negyedik pontot kizárja, úgy a négy ponton két parabola megy át; a négy pont bármely más helyzeténél pedig a négy ponton egyetlenegy parabola sem mehet át.*«

Mőbius szerint a négy pontnak az első helyzetét azok parabolikus helyzetének, a második helyzetét pedig a négy pont hyperbolikus helyzetének nevezzük.*) Az utóbbi elnevezés igazolására fölemlítjük, hogy a négy pont második helyzeténél a négy ponton pusztán csak hyperbolák mehetnek át, mit a következő megfontolások segítségével látunk be.

Az (1) alatti kúpszelet hyperbola, ha a következő föltétel áll:

$$\{(123)-(234)\}^2\lambda^2-2\{(234)(124+(134)(123)\}\lambda+$$
$$+\{(134)-(234)^2>o.$$

Ha ezen föltétel első tagját vonalos tényezőire felbontjuk, úgy azoknak e fölvétel következtében conjugált complex értékek felelnek meg és a következő alakúak lesznek:

$$\{(123)-(234)\}^2(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

mely conjugált complex tényezők szorozmánya mindig positiv, a mi a hyperbola föltételének megfelel.

3. Adva vannak az 1, 2, 3, 4, 5 pontok, kérdés, hogy az azokon átmenő kúpszelet ellipsis, vagy hyperbola?

A puszta megtekintés mutatja, hogy az öt pont közűl mindig négy parabolikus helyzetben lévő pontot választhatunk ki, mert ha az 1, 2, 3 pontokból meghatározott háromszögöt elképzeljük, úgy a még hátralevő két pont helyzete az 123 háromszög irányában vagy olyan, hogy mind a kettő a háromszögből kizáratik, vagy az egyik kizáratik és a másik bezáratik, vagy végre mind a kettő bezáratik, mely utóbbi esetben a 4 és 5 pontokat az 123 háromszög két csúcsával combinálva ismét négy pontot nyerünk, mely parabolikus helyzetben van.

Feltéve tehát, hogy az 1, 2, 3, 4 pontok parabolikus

*) Lásd az i. h. 379. l.

helyzetűek, úgy azokon a 2-dik szám szerint mindig két parabola megy át. Hogy ha a négy ponthoz még az 5 pont is csatlakozik, úgy meg kell vizsgálni, hogy vajjon

$$\{(123)-(234)\}^2\lambda^2-2\{(234)(124)+(134)(123)\lambda+$$
$$+\{(134)-(234)\}^2 \gtrless o \ldots (4)$$

a hol λ az (1) alatti egyenletből meghatározható, ha abban x, y helyett x_5, y_5-öt helyettesítünk.

Ha a (4) alatti föltételekben az első tagot ismét vonalos tényezőkre bontjuk fel, úgy azt a következőképen írhatjuk:

$$\{(123)-(234)\}^2\{\lambda-\lambda_1\}\{\lambda-\lambda_2) \gtrless o,$$

a hol λ_1 és λ_2 a négy pontból meghatározott paraboláknak megfelelő parameterértékek. A (4) alatti föltételek közűl az első akkor áll, ha vagy

$$\lambda-\lambda_1>o, \quad \lambda-\lambda_2>o$$

vagy pedig szintén egyidejűleg

$$\lambda-\lambda_1<o, \quad \lambda-\lambda_2<o;$$

a második föltétel pedig úgy áll, ha vagy

$$\lambda-\lambda_1>o, \quad \lambda-\lambda_2<o,$$

vagy pedig egyidejűleg

$$\lambda-\lambda<o, \quad \lambda-\lambda_2>o.$$

A négy ponton átmenő parabolák egyenletei a következők:

$$(120)(340)-\lambda_1(140)(230)=o \ldots (5)$$
$$(120)(340)-\lambda_2(140)(230)=o \ldots (6)$$

továbbá a helyettesítés eredményei, ha x, y helyébe x_5, y_5-öt teszünk, a következő alakra hozhatók:

$$(125)(345)-\lambda_1(145)(235)=(145)(235)(\lambda-\lambda_1)$$
$$(125)(345)-\lambda_2(145)(235)=(145)(235)(\lambda-\lambda_2).$$

Az elemző mértan ismeretes tételéből következik,*)

*) Legyen a kúpszelet átalános egyenlete pont-coordinátákban a következő:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=o$$

továbbá

$$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F\equiv U_1$$

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=\Delta \qquad \left.\begin{array}{l} BE-CD=\delta \\ BD-AE=\varepsilon \\ AC-B^2=\varphi \end{array}\right\} \begin{array}{l} Ax_1+By_1+D=D_1 \\ Bx_1+Cy_1+E=E_1 \end{array}$$

hogy az x_5, y_5 pont az (5) alatti parabolán kivül vagy belül fekszik, a mint

$$\lambda-\lambda_1 \gtrless o$$

és úgy szintén a (6) alatti parabolán kivűl, vagy belűl fekszik, a mint

$$\lambda-\lambda_2 \gtrless o.$$

Ha mind ezeket megfontoljuk, úgy találjuk, hogy az öt adott ponton átmenő kúpszelet hyperbola, ha az 5 pont az (5) és (6) alatti parábolákon egyidejüleg kivűl, vagy pedig egyidejüleg belűl fekszik; ha pedig az 5 pont az (5) és (6) alatti paraboláknak egyikén kivűl és a másikán belűl fekszik, úgy az öt ponton átmenő kúpszelet ellipsis.

úgy az x_1, y_1 pontnak megfelelő polára a kúpszeletben a következő egyenlet által van kifejezve:

$$(Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+Cy_1+E)y+Dx_1+Ey_1+F=o$$

melynek metszéspontja a fennebbi kúpszelettel a következőképen van meghatározva:

$$x=\frac{\delta U_1-\Delta x_1 \pm E_1\sqrt{-\Delta U_1}}{\varphi U_1-\Delta}$$

$$y=\frac{\varepsilon U_1-\Delta y_1 \mp D_1\sqrt{-\Delta U_1}}{\varphi U_1-\Delta}$$

mely egyenletek mutatják, hogy a metszéspontok valósok, vagy képzetesek, a mint

$$\Delta U_1 \lesseqgtr o.$$

Miután pedig az ellipsis és parabola esetében $A>o$ felvétel mellett $\Delta<o$, úgy az előbbi szorozmány akkép negativ, vagy positiv, amint

$$U_1 \gtrless o;$$

a hyperbola esetében pedig

$$\Delta>o$$

és igy a fennebbi szorozmány negativ, vagy positiv, amint:

$$U_1 \lesseqgtr o$$

Ha tehát a kúpszelet síkjában a pontot a kúpszeleten kivül vagy belül fekvőnek nevezzük, a mint a megfelelő polára azt valós, vagy képzetes pontokban metszi, úgy az előbbiek szerint a következőket találjuk:

Az ellipsis és parabola esetében az x_1, y_1 pont azon kivűl, vagy belűl fekszik, amint

$$U_1 \gtrless o$$

a hyperbola esetében pedig az vagy azon kivűl, vagy belűl fekszik, amint:

$$U_1 \lesseqgtr o.$$

Átmenetnek azon esetet kell tekintenünk, a melyben az 5 pont az (5) vagy (6) alatti parabolák egyikén fekszik, mely esetben a feladat követelményeinek az egyik, vagy másik parabola felel meg.

Az ezen számban nyert eredményeket a következő tételben mondhatjuk ki:

»Öt adott pont közül mindig négy parabolikus helyzetben lévő pont kiválasztható, melyek két parabolát határoznak meg, ha azután az ötödik vagy mind a két parabolán kivül vagy mind a kettőn belül fekszik, úgy az öt ponton átmenő kúpszelet hyperbola; ha pedig ezzel ellenkezőleg az ötödik pont az egyik parabolán kivül és a másik parabolán belül fekszik, úgy az öt ponton átmenő kúpszelet ellipsis.«

4. Könnyű megmutatni, hogy mindig egy parabola lehetséges, a mely négy adott egyenest érint. Ha felteszszük, hogy az 1, 2, 3, 4 egyenesek vonal-coordinátáit ismerjük, úgy a négy adott egyenest érintő görbeseregnek az egyenlete vonal-coordinátákban a következő lesz:

$$(120)(340)-\lambda(140)(230)=o \ldots (7)$$

az ezen seregbe tartozó parabolának a paraméterét a következő egyenlet határozza meg:

$$s_{12}s_{34}-\lambda s_{14}s_{23}=o \ldots (8),$$

mely egyenletből a fennebbi állitás következik.

5. Adva vannak az 1, 2, 3, 4, 5 egyenesek vonal-coordinátái, kérdés, hogy az öt egyenest érintő kúpszelet, mikor ellipsis és mikor hyperbola?

Ha adott öt egyenesből négy tetszőlegest választunk ki, legyenek az 1, 2, 3, 4 egyenesek, úgy az azokat érintő kúpszelet sereg egyenletét a (7) alatti egyenlet fejezi ki, ha azután ezen négy egyeneshez még az ötödik is hozzájárúl, úgy az öt egyenest érintő kúpszelet paraméter értékét a következő egyenlet határozza meg:

$$(125)(345)-\lambda(145)(235)=o \ldots (9)$$

*)Hogy eldönthessük, hogy a (8) alatti kúpszelet mikor

---

*) Jegyzet. Szükségesnek tartjuk megemlíteni, hogy a kúpszelet, melynek egyenlete vonalcoordinátákban a következő:

$$\alpha u^2+2\beta uv+\gamma v^2+2\delta u+2\varepsilon v+\varphi=o,$$

ellipsis és mikor hyperbola, úgy mindenekelőtt a (8) alatti egyenletnek megfelelő φ és $\bigtriangledown$ értékeket kell meghatároznunk és könnyen találjuk, hogy

$$\varphi = s_{12}s_{34} - \lambda s_{14}s_{23}$$

vagy ha a (9) alatti egyenletből folyó λ értéket helyettesítjük:

$$\varphi = (145)(235)s_{12}s_{34} - (125)(345)s_{14}s_{23} \ldots (10).$$

A $\bigtriangledown$ érték kiszámításánál meg kell először is jegyeznünk, miután a jelen esetben

$$K \equiv (120)(340)$$
$$K' \equiv (140)(230)$$

tehát mind K, mind pedig K' két vonalos tényezőre felbontható, úgy mind D, mind pedig D' eltünik a Θ és Θ' mennyiségeket pedig a következőképen számítjuk ki:

K és K'-ban a műtéteket végrehajtva azokat a jegyzetben közlött alakokkal összehasonlítva találjuk, hogy

$$\begin{cases} a = q_{12}q_{34}, & c = r_{12}r_{34}, & f = s_{12}s_{34} \\ 2b = q_{12}r_{34} + q_{34}r_{12}, & 2d = q_{12}s_{34} + q_{34}s_{12}, & 2e = r_{12}s_{34} + r_{34}s_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a' = q_{14}q_{23}, & c' = r_{14}r_{23}, & f' = s_{14}s_{23} \\ 2b' = q_{14}r_{23} + q_{23}r_{14}, & 2d' = q_{14}s_{23} + q_{23}s_{14}, & 2e' = r_{14}s_{22} + r_{23}s_{14} \end{cases}$$

---

ha rövidség kedvéért

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varphi \end{vmatrix} = \bigtriangledown$$

tétetik, ha

$$\varphi > o \begin{cases} \bigtriangledown < o & \text{ellipsis} \\ \bigtriangledown > o & \text{hyperbola} \end{cases}$$

ha pedig

$$\varphi < o \begin{cases} \bigtriangledown > o & \text{hyperbola} \\ \bigtriangledown < o & \text{ellipsis.} \end{cases}$$

Ha továbbá

$$K \equiv au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev + f$$
$$K' = a'u^2 + 2b'uv + c'v^2 + 2d'u + 2e'v + f'$$

úgy

$$\bigtriangledown = \begin{vmatrix} a-\lambda a' & b-\lambda b' & d-\lambda d' \\ b-\lambda b' & c-\lambda c' & e-\lambda e' \\ d-\lambda d' & e-\lambda e' & f-\lambda f' \end{vmatrix} = D - \Theta\lambda + \Theta'\lambda^2 - D'\lambda^3,$$

ha

$$D = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ b' & c' & e' \\ d' & e' & f' \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \Theta &= a'(cf-e^2) + c'(af-d^2) + f'(ac-b^2) + \\ &+ 2b'(de-bf) + 2d'(be-cd) + 2e'(bd-ae) \\ \Theta' &= a(c'f'-e'^2) + c(a'f'-d'^2) + f(a'c'-b'^2) \\ &+ 2b(d'e'-b'f') + 2d(b'e'-c'd') + \\ &+ 2e(b'd'-a'e'). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} cf-e^2=-\tfrac{1}{4}\{u_1(234)-u_2(134)\}^2. \\ af-d^2=-\tfrac{1}{4}\{v_1(234)-v_2(134)\}^2. \\ ac-b^2=-\tfrac{1}{4}\{(234)-(134)\}^2. \\ de-bf=-\tfrac{1}{4}\{u_1(234)-u_2(134)\}\{v_1(234)-v_2(134)\}. \\ be-cd=-\tfrac{1}{4}\{u_1(234)-u_2(134)\}\{(234)-(134)\}. \\ bd-ae=-\tfrac{1}{4}\{v_1(234)-v_2(134)\}\{(234)-(134)\}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c'f'-e'^2&=-\tfrac{1}{4}\{u_2(134)-u_3(124)\}^2. \\ a'f'-d'^2&=-\tfrac{1}{4}\{v_2(134)-v_3(124)\}^2. \\ a'c'-b'^2&=-\tfrac{1}{4}\{(134)-(124)\}^2. \\ d'e'-b'f'&=-\tfrac{1}{4}\{u_2(134)-u_3(124)\}\{v_2(134)-v_3(124)\}. \\ b'e'-c'd'&=-\tfrac{1}{4}\{u_2(134)-u_3(124)\}\{(134)-(124)\}. \\ b'd'-a'e'&=-\tfrac{1}{4}\{v_2(134)-v_3(124)\}\{(134)-(124)\}. \end{aligned}$$

Ha ez értékeket Θ és Θ'-ban helyettesítjük, úgy végre találjuk, hogy

$$\Theta=-\tfrac{1}{4}(234)(134)(124)(123)$$
$$\Theta'=\tfrac{1}{4}(234)(134)(124)(123)$$

és így végre

$$\nabla=\tfrac{1}{4}(234)(134)(124)(123)\lambda(\lambda+1)$$

vagy λ-nak a (9) alatti egyenletből eredő értékét helyettesítjük:

$$\nabla=\tfrac{1}{4}\frac{(234)(134)(124)(123)(125)(345)\{(125)(345)+(145)(235)\}}{(145)^2(235)^2}$$

vagy ha még észreveszszük, hogy

$$(125)(345)+(145)(235)=(135)(245),$$

a mit úgy bizonyítunk be, hogy a

$$\begin{vmatrix} q_{13} & r_{13} & s_{13} \\ q_{25} & r_{25} & s_{25} \\ q_{45} & r_{45} & s_{45} \end{vmatrix}$$

determinánst egyszer az (132), máskor pedig a (245) determinánssal megszorozzuk, úgy még továbbá:

$$\nabla=\tfrac{1}{4}\frac{(234)(134)(124)(123)(125)(345)(135)(245)}{(145)^2(235)^2}.$$

6. A következő feltételek

$$s_{12}s_{34}(145)(235)-s_{14}s_{23}(125)(345)\gtrless o$$

mértani jelentése, hogy az 5 egyenes a (7) alatti parabolát vagy nem metszi, vagy pedig metszi.*)

Mielőtt $\bigtriangledown$-nak a mértani jelentéséről szólanánk, előbb még a következőket fontoljuk meg.

Azon háromoldal (Dreiseit) kétszeres területét, melyet az i, k, l egyenesek határoznak meg Δ_{ikl}-lel jelölve, találjuk (Lásd Joachimsthal következő czímű értekezését: »Sur quelques applications des déterminants à la Géométrie« Crelle Journal 40. köt. 25. l.)

---

*) Ha

$$\alpha u^2+2\beta uv+\gamma v^2+2\delta u+2\varepsilon v+\varphi=o$$

egyenlet a kúpszelet egyenlete vonalcoordinátákban, továbbá

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varphi \end{vmatrix}=\bigtriangledown \qquad \left.\begin{array}{l} \beta\varepsilon-\gamma\delta=d \\ \beta\delta-\alpha\varepsilon=e \\ \alpha\gamma-\beta^2=f \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha u_1+\beta v_1+\delta=\delta_1 \\ \beta u_1+\gamma v_1+\varepsilon=\varepsilon_1 \end{array}$$

$$\alpha u_1{}^2+2\beta u_1v_1+\gamma v_1{}^2+2\delta u_1+2\varepsilon v_1+\varphi\equiv V_1$$

úgy az u_1, v_1 egyenesnek megfelelő pólusát a fennebbi kúpszeletben a következő egyenlet fejezi ki:

$$(\alpha u_1+\beta v_1+\delta)u+(\beta u_1+\gamma v_1+\varepsilon)v+\delta u_1+\varepsilon v_1+\varphi=o$$

az ezen ponton átmenő érintők coordinatái pedig a következők:

$$u=\frac{dV_1-\bigtriangledown u_1\pm\varepsilon_1\sqrt{-\bigtriangledown V_1}}{fV_1-\bigtriangledown},$$

$$v=\frac{eV_1-\bigtriangledown v_1\pm\delta_1\sqrt{-\bigtriangledown V_1}}{fV_1-\bigtriangledown}$$

mely egyenletekből kitetszik, hogy u, v valósok vagy képzetesek, a mint

$$-\bigtriangledown V_1\gtrless o,$$

ugyanezt még így mondhatjuk ki, hogy az u_1, v_1 egyenes a kúpszeletet metszi, vagy nem metszi, a mint

$$-\bigtriangledown V_1\gtrless o$$

Feltéve, hogy $\varphi>o$ (a mit mindig fel lehet tenni, miután ha $\varphi<o$ volna, az egyenletet -1-gyel megszorozva, a felvett eset áll be) úgy a kúpszelet ellipsis, vagy hyperbola, a mint

$$\bigtriangledown\lessgtr o.$$

Így tehát az ellipsis esetében az u_1, v_1 egyenes metszi, vagy nem metszi, a mint $V_1\lessgtr o$

a hyperbola esetében pedig metszi vagy nem metszi, a mint

$$V_1\gtrless o.$$

Miután a parabolánál mindig feltehető, $\bigtriangledown<o$, mert ha az ellenkező történnék, úgy az egyenletet -1-gyel megszorozva, azt oly alakra hoztuk, hogy $\bigtriangledown<o$, úgy a parabolánál a nevezett felvétel alatt az u_1, v_1 egyenes metszi vagy nem metszi a parabolát, a mint

$$V_1\gtrless o,$$

$$\Delta_{ikl} = \pm \frac{(ikl)}{s_{kl}s_{li}s_{ik}}, \ldots (11)$$

a hol a felső vagy alsó előjel érvényes, a mint az *ikli* körülirás positiv vagy negativ.

Így tehát az

$$s_{kl}s_{li}s_{ik} \ldots (12)$$

szorzat positiv vagy negativ, a mint az *ikli* körűlirás positiv, vagy negativ, megjegyzendő, hogy az *(ikl)* determináns a (12) alatti szorzattal ugyanazon előjelű.

Ha most a (11) alatti egyenlet szerint ∇ értékében $(145)^2$ és $(235)^2$ értékeit helyettesítjük, találjuk

$$\nabla = \frac{(224)(134)(124)(123)}{4\Delta_{145}\Delta_{235}} \cdot \frac{(125)(345)(135)(245)}{s_{45}s_{51}s_{14} \cdot s_{35}s_{52}s_{23}} \ldots (13)$$

A jobb oldalon álló első tört mindig positiv, miután a nevezője positiv és a számlálója is az, 1, 2, 3, 4 egyenesek tetszőleges helyzeténél szintén positiv, ∇-nak az előjele tehát pusztán csak a második tört előjelétől függ; ezen tört pedig positiv, ha az 5 oldal felett álló:

125, 345, 135, 245, 145, 235

háromszögökben az

1251, 3453, 1351, 2452, 1451, 2352

körülirások közűl páros számú positiv (és így páros számú negativ is) ugyane tört negativ ha az előbbi körülirások közűl páratlan számú positiv van (és így páratlan számú negativ is).

Ha meggondoljuk továbbá, hogy ha két háromszög, mint az *ikl* és *imn* háromszögök ugyanazon *i* egyenes felett emelkednek, úgy ha a nevezett háromszögök *ikli* és *imni* körülirásai ugyanazon előjelűek, e háromszögök *kl* és *mn* csúcsai az *i* egyenes ugyanazon oldalán feküsznek, ha pedig a nevezett körülirások különböző előjelűek, a háromszögök *kl* és *mn* csúcsai az *i* egyenes különböző oldalán feküsznek, ∇ előjelét a következőképen határozhatjuk meg:

»∇ positiv vagy negativ, a mint az 1, 2, 3, 4 egyenesek hat metszés pontja közűl az 5 egyenes egyik oldala felett fekvő pontok párosszámúak (és így az azok másik oldalán fekvő pontok is páros számúak), vagy pedig páratlan számúak (és így a másik oldalon fekvő pontok is páratlan számúak).

Ezek szerint tehát, hogy az öt adott egyenest érintő kúpszelet ellipsis vagy hyperbola, a következőképen eldönthető:

Az öt adott egyenes közül bármely négyet kiválasztva, mindig van egy parabola, mely a négy egyenest érinti, és

a) *Ha az ötödik egyenes nem metszi a parabolát, úgy a kúpszelet ellipsis, vagy hyperbola, a mint az ötödik egyenes az első négy egyenes hat metszés pontját páratlan, vagy páros számban választja el.*

b) *Ha pedig az ötödik egyenes a parabolát metszi, úgy az ellipsis, vagy hyperbola a mint az ötödik egyenes az első négy egyenes hat metszéspontját páros vagy páratlan számban választja el.*

Ha végre az ötödik egyenes a parabolát érinti, úgy az első négy egyenest érintő parabola felel meg a feladat követelményeinek.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgésforrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erőmütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában. 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktani trigonometriája. . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország delkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.

Budapest, 1880. Az Athenaeum r. tars. könyvnyomdaja.